数理解析研究所講究録
386巻 1980年 218-230

塑性振動論における存在定理について

熊本大学 理学部　三好哲彦

Duvaut-Lions [1] は変分不等式の理論のいわば応用問題として弾-塑性問題を扱っているが，筆者のみるところでは解の存在性を示す上ではこの方法は有効であっても，諸々の定性的な問題の取扱いや，また数値解析上の諸問題を考える上では不便にみえる。それは塑性解を物理的に性質の異る他の解の極限としてとらえようとするところに一つの大きな原因がある。塑性論の枠組の中で話を進めるため，ここでは[2]で提案された方法が一般の塑性振動にたいしても有効であるということを示したい。

1. 塑性振動の増分的定式化

文献[3]，[4]にもとづいて，以下のような問題を考える。Ωを(x_1, x_2)－平面上の有界領域，Iを時間区間$(0, T)$とする。未知関数は変位 $u=(u_1, u_2)(t, x)$ であるが，これは，ひずみ，

応力，硬化パラメータと呼ばれる $\varepsilon=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})$，$\sigma=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})$ $(\sigma_{21}=\sigma_{12})$，$\alpha=(\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{12})$ と以下に述べる関係を満たさなければならない。慣習に従って x_j，t にかんする偏導関数を $u_{,j}$ 及び $\dot{u}$ で表わす。又 a^*b は vector の内積を表わすことにし，関数の L^2 あるいは $(L^2)^k$（k:正整数）における内積及びノルムは (α,β)，$\|\alpha\|$ で表わす。

Mises の降伏条件及び Ziegler [4] の硬化則に従う塑性振動の方程式は次のように表わされる．

(1.1) $$\rho\ddot{u}_i-\sum_j\sigma_{ij,j}=b_i \qquad T\times\Omega$$

(1.2) $$\begin{cases}\dot{\sigma}=D\dot{\varepsilon}\\ \dot{\alpha}=0\end{cases}\qquad \text{if } f(\sigma-\alpha)<\bar{\sigma}$$

(1.3) $$\begin{cases}\dot{\sigma}=(D-D')\dot{\varepsilon}\\ \dot{\alpha}=(\sigma-\alpha)\partial f^*\dot{\sigma}/f\end{cases}\qquad \text{if } f(\sigma-\alpha)=\bar{\sigma}\quad \&\quad \partial f^*\dot{\sigma}\geq 0$$

ただし，ρ：正定数，$\{b_i\}$：与えられた関数，$\bar{\sigma}$：正定数

$$f^2(\sigma)=\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2$$

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&(1-\nu)/2\end{pmatrix}\qquad (1>\nu>0)$$

$$D'=\frac{D\partial f\partial f^*D}{\gamma+\partial f^*D\partial f}\qquad (\gamma>0)$$

$$\partial f=\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{11}},\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{22}},\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{12}}\right)$$

ひずみは小さいと仮定する。i.e. $\varepsilon=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})=$

($u_{1,1}$, $u_{2,2}$, $u_{1,2}+u_{2,1}$). 又初期変位は0, 境界の一部Γ_0は固定され他は自由, $\sum_j \sigma_{ij}\cos(n,x_j)=0$ だとする。以下の議論のためには$\{b_i\}$及び初速度には若干の条件を仮定する必要がある。(1.2)の条件をみたすΩ内の点はelasticであると呼ばれ, (1.3)の条件が成立している点はplasticであると呼ばれる。以下の目的は(1.1)~(1.3)の(弱)解が一意的に存在するということを示すことである。

2. Semi-discrete system.

(1.2)及び(1.3)における状態の区別(elastic, plastic)は各点ごとにおける区別を要求しているのであるが, これが可能になるのは滑らかな解が得られて後のことである。したがってこの区別を数学的に厳密な定式化の出発点に置くのは困難である(この意味で(1.3)~(1.1)は'物理的'な定式化である)。しかし, この区別が各点ではなく, 小領域上での平均的な意味でなら可能であろうと考えるのは自然である。ここに有限要素法の発想が可能となる根拠がある。この節では数学的な定式化とは一応離れて, (1.1)~(1.3)の問題にたいする最も普通の構造力学的な接近を取り上げ, それにたいする数学的な解釈を与えることによって, 我々の(数学的な)解を構成

するための出発点としたい。

ここでは Ω を閉多角形領域と仮定する。これは後に極限をとるさいの繁雑さを避けるためであり、以下の議論は実用上十分一般的な場合にも有効である。$\hat{\Omega}$ を Ω の三角形分割とする。分割にあたっては、有限要素法において通常仮定される多少の条件をここでも仮定する。$\{\varphi_p\}$ を節点 p で 1 をとる区分的一次の通常の有限要素 basis とする。変位 u_i の時刻 t における値を次の形で近似する。

(2.1) $$u_i(t) = \sum_{p \in P} u_i^p(t)\, \varphi_p$$

ただし P は $\hat{\Omega} - \Gamma_0$ 内の節点の集合を表わす。未知関数 $\{u_i^p(t)\}$ は次の常微分方程式 — Galerkin system — より決定する。

(2.2) $$(\rho \ddot{u}_i, \varphi_p) + \sum_j (\sigma_{ij}, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \qquad p \in P$$

(2.3) $$\begin{cases} \dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \qquad \text{if } f(\sigma - \alpha) < \bar{\sigma} \quad (\text{i.e., elastic})$$

(2.4) $$\begin{cases} \dot{\sigma} = (D - D')\dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} = (\sigma - \alpha)\,\partial f^{*}\dot{\sigma}/f \end{cases} \qquad \text{if } f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma} \;\; \& \;\; \partial f^{*}\dot{\sigma} \geq 0 \quad (\text{i.e., plastic})$$

$\varepsilon - u$ 関係式および初期条件は前と同じである。初速度を表わす関数は $\{\varphi_p\}$ で補間することにする。

便宜上 (2.2)~(2.4) を semidiscrete system と呼ぼう。すなわちこの system をみたす (u, σ, α) をみつけることが我々の問題である。$u \in C^2(T)$, また σ と α にたいしては t にかんす

る絶対連続性を要求する。

さて，$t=0$ において $\sigma=\alpha=0$，又応力ーひずみ関係式は (2.3) が最初は使用される。ある時刻 $t=t_0$ においていくつかの要素にたいし $f(\sigma)=\bar{\sigma}$ が成立するまでは，弾性振動問題であって，解は一意的に存在する。$t=t_0$ を越えて解を接続するためには，$t>t_0$ で各要素にたいし，それが弾性・塑性のいずれの状態となるかを $t=t_0$ の時点で前もって決定しておかなければならない。このために，$t=t_0+0$ における $\partial f^{*}\dot{\sigma}$，またはその高階の導関数の値の符号に注目する。これをみるには $t=t_0$ で状態 (i.e. elastic, plastic) が変わり得る要素にたいしては，$t>t_0$ での状態を勝手に仮定して $t=t_0$ での初期値問題を設定し，その解の $t=t_0+0$ における振舞いを観察すればよい。

まずわかることは，$t=t_0$ ではじめて $f(\sigma)=\bar{\sigma}$ となった要素にたいしては，$t>t_0$ での状態 (i.e. elastic or plastic，以下同じ意味で使用) とは独立に $\partial f^{*}\dot{\sigma}\big|_{t_0+0}$ の符号が定まる。なぜならば，弾性，塑性に応じて次の２通りの場合がある。

$$\partial f^{*}\dot{\sigma}\Big|_{t_0+0} = \begin{cases} \partial f^{*} D\,\dot{\varepsilon}\Big|_{t_0+0} \\ \partial f^{*} D\,\dot{\varepsilon}\Big|_{t_0+0}(1-\theta) \end{cases}, \quad \theta = \frac{\partial f^{*} D\,\partial f}{\ell + \partial f^{*} D\,\partial f}$$

ここで $\dot{\varepsilon}$ は $t=t_0$ で連続であり，$\theta<1$ であるから $\partial f^{*}\dot{\sigma}\big|_{t_0+0}$ の符号自体は変わらない。（注：$\partial f^{*}\dot{\sigma} \gtrless 0$ は $\dot{\sigma}$ が曲面 $f(\sigma)=\bar{\sigma}$ の $\binom{外}{内}$ 部へ向う事を意味する。）したがって $\partial f^{*}\dot{\sigma}\big|_{t_0+0}=0$ となる

要素以外は $\overset{=}{\square}$ の符号をみることにより $t>t_0$ での状態が定められる。 $\partial f^*\dot{\sigma}|_{t_0+0}=0$ となった要素にたいしても $t>t_0$ での状態を決定するために次のことをまず準備する。

補題1. σ および α は (2.3) 又は (2.4) により定められるものとし，$t=t_0+0$ で $f(\sigma-\alpha)=\bar{\sigma}$, $\partial f^*(\sigma-\alpha)\cdot\dot{\sigma}=0$ であるとする（注：ある要素について考えている）。又，σ, α は t $(\geqq t_0)$ で実解析的であるとし，$\partial f^*(\sigma-\alpha)\cdot\dot{\sigma}$ の Taylor 展開を次の様に表わす。

$$g(t)\equiv\partial f^*(\sigma-\alpha)\cdot\dot{\sigma}=\sum_{k=1}^{\infty} g_0^{(k)}(t-t_0)^k$$

ここで次のような $k_0(\neq\infty)$ があるとする。

$$g_0^{(k_0)}\neq 0\ ,\quad g_0^{(k)}=0\quad(k<k_0)$$

このとき，正の数 δ および時間区間 $I_\delta=(t_0,\ t_0+\delta)$ があって

(1) もし $g_0^{(k_0)}<0$, かつ $\alpha\equiv\alpha_0=\text{const.}$ であれば

$$f(\sigma-\alpha_0)<\bar{\sigma}\qquad \text{in } I_\delta$$

(2) もし $g_0^{(k_0)}>0$, かつ α が (2.4) の第二式をみたしてあれば

$$\partial f^*(\sigma-\alpha)\cdot\dot{\sigma}>0\ ,\qquad f(\sigma-\alpha)=\bar{\sigma}\qquad \text{in } I_\delta$$

（注：$\partial f^*(\sigma-\alpha)$ は ∂f の $\sigma-\alpha$ における値であって内積ではない）．

以下，この補題における $g_0^{(k_0)}$ の符号があらかじめ決定できるということを示したい。（∂f は $\partial f(\sigma-\alpha)$ を表わすものとする）。

$\mathcal{E}$ を $\hat{\Omega}$ の要素すべての集合とし，$\mathcal{E}_0$ を $t=t_0$ で $f(\sigma-\alpha)=\bar{\sigma}$ $\partial f^*\dot{\sigma}|_{t_0+0}=0$ となる要素の集合とする。$\mathcal{E}-\mathcal{E}_0$ の要素にたい

しては、上のことから $t>t_0$ での状態は決定されていると考えてよい。まず、$\mathcal{E}_0$ の要素にたいして次が成立する。

(a) $\partial f^* D \dot{\varepsilon}\big|_{t_0+0} = 0$

(b) $\dot{\sigma}\big|_{t_0+0}$ は $\mathcal{E}_0$ の次の状態と独立。(i.e. $t>t_0$ での状態)

次に、$\mathcal{E}_0$ の要素にたいしては、$(\partial f^*\dot{\sigma})_t\big|_{t_0+0}$ の符号は、$\mathcal{E}_0$ の次の状態と独立に定まることがわかる。これは、$t>t_0$ で

$$(\partial f^*\dot{\sigma})_t\big|_{t_0+0} = \begin{cases} (\partial f^* D\dot{\varepsilon})_t\big|_{t_0+0} & (\text{if elastic}) \\ (\partial f^* D\dot{\varepsilon})_t\big|_{t_0+0}(1-\theta) & (\text{if plastic}) \end{cases}$$

であるが、上の(b)および $\dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}$ の連続性より、$(\partial f^* D\dot{\varepsilon})_t\big|_{t_0+0}$ が次の状態と独立だということからわかる。したがって、$\mathcal{E}_0$ のうちで $(\partial f^*\dot{\sigma})_t\big|_{t_0+0}=0$ となるもの以外にたいしては $t>t_0$ での状態が定まる。この論法は次のように一般化できる。$(\partial f^*\dot{\sigma})^{(i)} = \dfrac{\partial^i}{\partial t^i}(\partial f^*\dot{\sigma})$ etc. とする。

$\mathcal{E}_k$ ($k \geq 0$) を次の条件をみたす要素の集合とする。

(イ) $f(\sigma-\alpha)=\bar{\sigma}$

(ロ) $(\partial f^*\dot{\sigma})^{(i)}$ ($i\leq k$) の $t=t_0+0$ における値の符号は、$\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立に定まり、かつゼロとなる。

(ハ) $\mathcal{E}-\mathcal{E}_k$ の要素の次の状態は定まっている。

このとき、$\mathcal{E}_k$ の要素のすべてに対して次の条件

(A) $\qquad (\partial f^{*} D \dot{\varepsilon})^{(i)}\Big|_{t_0+0} = 0 \qquad (i \leq k)$

(B) $\qquad \sigma^{(i+1)}\Big|_{t_0+0} \ (i \leq k)$ は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立

がみたされ，かつ，また条件

(C) $\qquad u^{(i+2)}\Big|_{t_0+0} \ (i \leq k)$ は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立

もみたされるならば，

(I) $\mathcal{E}_k$ のすべての要素について，$(\partial f^{*} \dot{\sigma})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0}$ の符号は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立に定まる。したがってこれがゼロにならない $\mathcal{E}_k$ の要素にたいしては次の状態が決定される。

(II) $\mathcal{E}_k$ の要素のうち $(\partial f^{*} \dot{\sigma})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} = 0$ となるもの全体（定義によりこれは $\mathcal{E}_{k+1}$ である）にたいし，上の (A), (B), (C) が $k \to k+1$ として成立する。

(I) の証明：各要素にたいして，次の状態をどう選ぶかによって２つの可能性がある。

$$(\partial f^{*} \dot{\sigma})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} = \begin{cases} (\partial f^{*} D \dot{\varepsilon})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} \\ (\partial f^{*} D \dot{\varepsilon})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} (1-\theta) \end{cases}$$

仮定の (B), (C) により $(\partial f^{*} D \dot{\varepsilon})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0}$ は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立に定まるから左辺の量の符号も然り。

(II) の証明：上のことから，$(\partial f^{*} \dot{\sigma})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} = 0$ であれば $(\partial f^{*} D \dot{\varepsilon})^{(k+1)}\Big|_{t_0+0} = 0$ である。したがって (A) が $k+1$ のとき成立。

(B) を示すため，次の２通りの可能性があることに注目する。

$$\begin{cases} \sigma^{(k+2)} = D\,\varepsilon^{(k+2)} \\ \sigma^{(k+2)} = \left(D\dot{\varepsilon} - D/\eta\,\partial f\cdot\partial f^{*}\dot{\sigma}\right)^{(k+1)} \end{cases}$$

$$= D\,\varepsilon^{(k+2)} - D/\eta\left[\sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}C_r\,(\partial f)^{(k+1-r)}(\partial f^{*}\dot{\sigma})^{(r)}\right]$$

ところが、第三式の最後の項は明らかに $t=t_0+0$ ではゼロである。したがって仮定(C)により(B)が $k\to k+1$ として成立する。

次に $t>t_0$ ではいずれにしろ次式が成立している。

$$(\rho u_i^{(k+3)}, \varphi_p) + \sum_j (\sigma_{ij}^{(k+1)}, \varphi_{p,j}) = (b_i^{(k+1)}, \varphi_p)$$

$\mathcal{E}-\mathcal{E}_{k+1}$ の要素の次の状態はすでに確定しているから、これらの要素上での $\sigma^{(i)}\big|_{t_0+0}$ $(i\leq k+1)$ は $\mathcal{E}_{k+1}$ の次の状態とは独立に決定される(仮定(C)より)。一方 $\mathcal{E}_{k+1}$ の要素上での $\sigma^{(k+1)}\big|_{t_0+0}$ は $\mathcal{E}_{k+1}$ の次の状態とは独立(仮定(B)より)である。したがって上式より $u^{(k+3)}\big|_{t_0+0}$ は $\mathcal{E}_{k+1}$ の次の状態と独立である。これは(C)が $k\to k+1$ として成立することを意味する。

さて、$\mathcal{E}_0$ にたいしては(A),(B),(C)の三条件がみたされていることを前に示した。したがって $\mathcal{E}_1$ が well defined であって(A),(B)及び(C)が $k=1$ として成立する。したがって $\mathcal{E}_2$ が well defined であって、($\mathcal{E}_2\neq\phi$ であれば)(A),(B),(C)が $k=2$ として成立する。これをくり返して行けば、すべての要素にたいし次の状態が物理的に妥当な形で決定できる。例外としては

$$(\partial f^{*}\dot{\sigma})^{(k)}\big|_{t_0+0} = 0 \qquad \forall k$$

となる要素があるが この要素にたいしては $t>t_0$ は塑性とする(その理由等については[2]をみられたい)。

このようにして, $t>t_0$ での要素の状態があらかじめ決定できるので, 物理的に妥当な解が $t\geq t_0$ を越えて接続される。上の論法は除荷 (i.e. plastic → elastic) の際も全く同じことが可能で, 以下に示すエネルギー不等式を考慮すれば, 考えている区間 T の全体にわたり解が接続されることがわかる。

<注意1>: 任意の $t_0\in T$ にたいし, 次の三つの場合がある.

(1) いかなる要素も t_0 の近傍では状態の変化を行わない。

(2) いくつかの要素が $t\geq t_0$ で elastic ⟷ plastic の変化を行う。

(3) t_0 は (2) のような t_0 の集積点である。

<注意2>: 上の(3)の場合, ある δ があって時間区間 $(t_0, t_0+\delta)$ のあいだはいかなる要素も状態の変化を行わない. これは上述した解の接続法をみればわかるように, 解が区分的に解析的であるということからくる。— このためには外力にたいするある種の仮定が必要である.

上に定式化した問題は別の定式化が可能である。 このため, χ^e を要素 e の特性関数として, u, ε, σ, α を次の形で表現する.

$$u(t) = \sum_{p \in P} u^p(t)\varphi_p \quad , \quad (\varepsilon, \sigma, \alpha)(t) = \sum_{e \in \mathcal{E}} (\varepsilon^e, \sigma^e, \alpha^e)(t)\chi^e$$

定理 1. semi-discrete system の初期値問題は次の問題と同等である：t にかんし積分可能な $(u^{(3)}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha})$ を持つ (u, σ, α) で次式をみたすものを求めよ。

$$(\rho \ddot{u}_i, \varphi)_p + \sum_j (\sigma_{ij}, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \qquad p \in P$$

$$(\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma}, \tau - \sigma) \leq 0 \qquad {}^\forall \tau \in K$$

$$\dot{\alpha} = 2S^{-1}(\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma})$$

ただし, $C = D^{-1}$, $\sigma \in K$ かつ

$$K = \{ \tau = \sum_e \tau^e(t)\chi^e ; \ \tau^e(t) \text{は } T \text{ で連続}, \ f(\tau - \alpha) \leq \bar{\sigma} \}$$

また S は ∂f と $\sigma - \alpha$ を $f\partial f = S(\sigma - \alpha)$ の関係で結びつけるある定数行列である。 u ー ε 関係式及び初期条件は semi-discrete system にたいするものと同じである。

証明には上の問題の解の一意性が示されればほとんど完全である。

定理 2. (u, σ, α) を semi-discrete system の解とする。

$$E_0(t) \equiv \|\dot{u}\|_\rho^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_S^2 + \|\sigma\|_C^2 \qquad t \in T$$

は Ω の三角形分割に関して一様に有界である。 ただし,

$\|\dot{u}\|_\rho^2 = (\rho\dot{u}, \dot{u})$, $\|\alpha\|_S^2 = (S\alpha, \alpha)$, etc.

定理3. (u, σ, α) を semi-discrete system の解とする。

$$E_1(t\pm 0) \equiv \left[\|\dot u\|_\rho^2 + \frac{1}{2}\|\dot\alpha\|_S^2 + \|\dot\sigma\|_C^2\right](t\pm 0)$$

はΩの三角形分割にかんして一様に有界である。

これを証明するには、次の補題を使用し、状態変化の生じない区間でまずエネルギー評価を行い、それを継いでゆけばよい。

補題2. $t=t_0$ で応力点 σ が降伏曲面 $\{\tau\in E^3;\ f^2(\tau-\alpha)=\bar\sigma^2\}$ を離れるならば

$$\partial f^* \dot\sigma = 0 \qquad at \quad t=t_0\pm 0$$

3. 塑性振動問題の弱解

前節で得た解 (u, σ, α) はΩの分割巾がゼロとなるとある函数へ収束し、それは第一節の問題の弱解と見做され得る。その証明法は Duvaut-Lions [1] におけるものと全く同じであるので結果だけを以下に記す。

$C^\infty(\bar\Omega)$ の函数で Γ_0 上でゼロとなるもの全体を $W_2^1(\Omega)$ のノルムで完備化したものを $\mathring{W}_2^1(\Omega, \Gamma_0)$ で表わす。又 $\alpha\in L^\infty(T; L^2(\Omega))$ にたいし $K=K_\alpha$ を次のように定義する。

$$K=\{\tau\in L^\infty(T;L^2(\Omega));\ \text{a.e. on } T,\ f^2(\tau-\alpha)\leq\bar{\sigma}^2\ \text{ a.e. on } \Omega\}$$

定理4. 次の問題は一意解を持つ．それは semi-discrete system の解の極限として与えられる：$(u,\sigma,\alpha)\in L^\infty(T;L^2(\Omega))$ であって次の条件をみたすものを求めよ．

a.e. T について

$$(\rho\ddot{u}_i,\varphi)+\sum_j(\sigma_{ij},\varphi_{,j})=(b_i,\varphi)\qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}_2^1(\Omega,\Gamma_0)$$

$$(\dot{\varepsilon}-C\dot{\sigma},\tau-\sigma)\leq 0\qquad \forall\tau\in K$$

$$\dot{\alpha}=\gamma S^{-1}(\dot{\varepsilon}-C\dot{\sigma})$$

ただし，$\sigma\in K$, $(u,\dot{u})\in L^\infty(T;\mathcal{D}_2^1(\Omega,\Gamma_0))$, $(\ddot{u},\dot{\sigma},\dot{\alpha})\in L^\infty(T;L^2(\Omega))$，$u-\varepsilon$ 関係式及び初期条件は (1.1)~(1.3) にたいするものと同じ．証明の詳細については [5] を参照されたい。

文　献

[1] Duvaut-Lions, Inequalities in Mechanics and physics Springer (1976)

[2] Miyoshi, Elastic-plastic vibration of a rod., Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. Vol. 16, No. 2.

[3] Yamada, 塑性・粘弾性, 培風館 (1972)

[4] Ziegler, A modification of Prager's hardening rule, Quart. Appl. Math. 17 (1959), 55-65.

[5] Miyoshi, On existence proof in plasticity theory, Kumamoto J. Sci. Vol. 14